25.02.2016

ΙΣΧΥΡΙΣΜΟΣ:

α) $\forall \mathcal{R} \in A$, τότε $\mathcal{R}_{X/\mathcal{R}} = \mathcal{R} \Leftrightarrow \forall x,y \in X: \quad x \sim_{\mathcal{R}} y \Leftrightarrow x \sim_{\mathcal{R}_\Delta} y$

Για τυχόντα $x, y \in X$, θα έχουμε: $x \sim_{\mathcal{R}_{X/\mathcal{R}}} y \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow$ τα x, y ανήκουν στο ίδιο σύνολο της διαμέρισης $X/\mathcal{R} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \exists [z]_{\mathcal{R}} \in X/\mathcal{R} : x, y \in [z]_{\mathcal{R}} \Leftrightarrow \exists [z]_{\mathcal{R}} \in X/\mathcal{R} : \begin{cases} x \sim_{\mathcal{R}} z \text{ κ'} \\ y \sim_{\mathcal{R}} z \end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \exists [z]_{\mathcal{R}} \in X/\mathcal{R} : x \sim_{\mathcal{R}} y$. Άρα $\mathcal{R} = \mathcal{R}_{X/\mathcal{R}}$

Με άλλα λόγια: $\forall \mathcal{R} \in A : \Psi(\Phi(\mathcal{R})) = \mathcal{R} \Rightarrow \Psi \circ \Phi = Id_A$

β) $\forall \Delta \in B : \Delta = X/\mathcal{R}_\Delta \Leftrightarrow \forall i \in I : A_i = [x]_{\mathcal{R}_\Delta}$, για κάποιο $x \in X$

(*)

$\forall x \in X : [x]_{\mathcal{R}_\Delta} = \{y \in X \mid y \sim_{\mathcal{R}_\Delta} x\} = \{y \in X \mid x, y \in A_i\} = A_i$

(*) Έστω ότι $x \in A_i$ (*)

Άρα $\Delta = X/\mathcal{R}_\Delta$ και Άρα $\Phi(\Psi(\Delta)) = \Delta, \forall \Delta \in B \Rightarrow$

$\Rightarrow \boxed{\Phi \circ \Psi = Id_B}$

Άρα οι απεικονίσεις Φ, Ψ είναι 1-1 και επί και $\Psi = \Phi^{-1}$

Παρατήρηση: Η μελέτη σχέσεων ισοδυναμίας επί του X συμπίπτει με τη μελέτη διαμερίσεων του X. Ιδιαίτερα, υπάρχουν τόσες σχέσεις ισοδυναμίας επί το X, όσες και διαμερίσεις του X.

Παράδειγμα: $X=\{x,y,z\}$. Οι διαμερίσεις του X είναι οι εξής:
- $\Delta_1 = X = \{x,y,z\}$
- $\Delta_2 = \{\{x,y\},\{z\}\}$
- $\Delta_3 = \{\{x,z\},\{y\}\}$
- $\Delta_4 = \{\{y,z\},\{x\}\}$
- $\Delta_5 = \{\{x\},\{y\},\{z\}\}$.

Επειδή λοιπόν υπάρχουν 5 διαμερίσεις του X, θα έχουμε 5 διαφορετικές σχέσεις ισοδυναμίας επί του X: R_{Δ_i}, $1\leq i\leq 5$

- R_{Δ_1}: $\forall a,b\in X: a\sim_{R_{\Delta_1}} b \Leftrightarrow a,b\in X$. Αυτό ισχύει για κάθε $a,b\in X$ και άρα $R_{\Delta_1}=X\times X$.

- R_{Δ_2}: Τότε: $R_{\Delta_2}=\{(x,x),(y,y),(z,z),(x,y),(y,x)\}\subseteq X\times X$

$\vdots$

- R_{Δ_5}: $\{(x,x),(y,y),(z,z)\}$

Παρατήρηση: Αν X είναι ένα σύνολο με πλήθος στοιχείων $|X|=n$, τότε συμβολίζουμε με
B_n = πλήθος των σχέσεων ισοδυναμίας οι οποίες ορίζονται επί του X.

→ καλείται ο n-οστός αριθμός του Bell

$B_1=1$, $B_2=2$, $B_3=5$, $B_4=15$, ..., $B_8=4.140$, ..., $B_{10}=115.975$

$$B_{2.841} = 9 \cdot 10^{6.548}$$

$$B_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} B_k$$

ΠΡΑΞΕΙΣ

Έστω S ένα μη-κενό σύνολο

Ορισμός: Μια (διμελής) πράξη επί του S είναι μια απεικόνιση
$\mu: S \times S \to S$
$(x,y) \mapsto \mu(x,y)$

Γενικά μια πράξη μ επί του S συμβολίζεται με έναν από τους παρακάτω τρόπους: $\cdot, +, *, \#, \circ, \circledast, \boxplus \ldots$ και το αποτέλεσμα μιας πράξης στα στοιχεία $x,y \in S$ θα συμβολίζεται αντίστοιχα: $x \cdot y$, $x+y$, $x \circledast y$, $x \# y$, $x \circ y$, $x * y$, $x \boxplus y$

- αν $x,y,z \in S$, τότε: $\mu(\mu(x,y),z) \leftrightarrow (x*y)*z$

Παραδείγματα:

① Έστω $\mathbb{K} \in \{\mathbb{N}, \mathbb{N}_0, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}\}$, τότε οι συνήθεις πράξεις πρόσθεσης $(+)$ και πολ/μου $(\cdot)$ είναι πράξεις επί του $\mathbb{K}$

- Η αφαίρεση $(-)$ είναι πράξη επί των $\mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$, αλλά όχι επί των $\mathbb{N}, \mathbb{N}_0$.

② Αν, λοιπόν, $\mathbb{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$ είναι το σύνολο όλων των $m\times n$ πινάκων με στοιχεία από το $\mathbb{K}$, τότε οι συνήθεις πράξεις πρόσθεσης $(+)$ και πολ/μου πινάκων $(\cdot)$, είναι πράξεις επί του $M_{m\times n}(\mathbb{K})$, (για τον πολ/μο απαιτούμε $m=n$, διαφορετικά δεν ορίζεται πράξη).

③ Έστω $F=\{f:\mathbb{R}\to\mathbb{R} \mid f: \text{συνάρτηση}\}$. Ορίζουμε πράξεις επί του F ως εξής: $\forall f,g \in F$:

$: (f+g)(x)=f(x)+g(x)$, $(f\cdot g)(x)=f(x)\cdot g(x)$.

④ Αν $C=\{f:\mathbb{R}\to\mathbb{R} \mid f: \text{συνεχής}\}$, τότε οι πράξεις $+, \cdot$ επί του F, ορίζουν πράξεις επί του C.

Έστω $A=\{f:\mathbb{N}\to\mathbb{C} \mid f: \text{συνάρτηση}\}$. Στο A ορίζονται οι εξής πράξεις:

Πρόσθεση: $\forall f,g\in A$: $f+g:\mathbb{N}\to\mathbb{C}$, $(f+g)(n)=f(n)+g(n)$

$f\cdot g:\mathbb{N}\to\mathbb{C}$, $(f\cdot g)(n)=f(n)\cdot g(n)$

$f*g:\mathbb{N}\to\mathbb{C}$, $(f*g)(n)=\sum_{d\mid n} f(d)g(n/d)$

$=\sum_{d\mid n} f(n/d)\,g(d)$

π.χ. $|S|=n$ τότε $S\times S\to S$

Οι δυνατές πράξεις επί του S είναι n^{n^2}

Ορισμός: Έστω $*:S\times S\to S$ είναι μια πράξη επί του S. Τότε:

① Η πράξη $*$ καλείται προσεταιριστική $\Leftrightarrow$ $\forall x,y,z\in S$:

$(x*z)*z = x*(y*z)$

② Η πράξη $*$ καλείται μεταθετική $\Leftrightarrow$ $\forall x,y\in S$:

$x*y=y*x$.

Παράδειγμα:

$S=\{a,b,c,d,\dots\}$ και έστω $*$ μια πράξη επί του S.
Τότε: $a*b*c*d$

1. $((a*b)*c)*d$
2. $(a*b)*(c*d)$
3. $(a*(b*c))*d$
4. $a*(b*(c*d))$
5. $a*((b*c)*d)$